МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

**ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ**

# РГР №1 «Функция нескольких переменных и её интеграл»

по дисциплине

«Математический анализ»

Вариант В

**Выполнили:**

студенты группы 21.4

Агей Михаил, Дубук Даниил,

Васильев Илья, Гуменник Петр,

Игнатьева Ксения  
  
**Преподаватель:**

Савченко Татьяна Владимировна

Санкт-Петербург

2023

# Содержание

[**РГР №1 «Функция нескольких переменных и её интеграл» 1**](#_gjdgxs)

[**Содержание 2**](#_30j0zll)

[**Задание 1 3**](#_2et92p0)

[**Решение 3**](#_tyjcwt)

[**График 1 5**](#_3dy6vkm)

[**Задание 2 6**](#_1t3h5sf)

[**Решение 6**](#_4d34og8)

[**Задание 3 7**](#_2s8eyo1)

[**Решение 7**](#_17dp8vu)

[**Задание 4 8**](#_3rdcrjn)

[**Решение 8**](#_26in1rg)

[**Задание 5 9**](#_lnxbz9)

[**Решение 9**](#_35nkun2)

[**Оценочный лист 10**](#_1ksv4uv)

[**Вывод 11**](#_44sinio)

# 

# 

# Задание 1

Даны три точки: A(0, 0,12), B(0, 0, 4), C(8, 0, 8). На плоскости Oxy найдите такую точку D, чтобы сфера, проходящая через A, B, C и D, имела наименьший радиус. Изобразите на графике.

# Решение

1. Окружность ABC точно будет частью сферы, так как A, B, C принадлежат сфере. Найдем радиус и центр этой окружности:

Заметим, что треугольник ABC равнобедренный: AC = BC =

H (0, 0, 8) - середина AB. AH = BH = 4. CH = 8.

Центр описанной окружности треугольника - точка пересечения серединных перпендикуляров. CH - серединный перпендикуляр, так как медиана к основанию в равнобедренном треугольнике. Значит M - центр описанной окружности будет иметь координаты (k, 0, 8). Расстояние от этой точки до всех точек треугольника одинаково. То есть:

k = 3

Значит M (3, 0, 8), R = 8 - 3 = 5

1. Из всех сфер, проходящих через окружность ABC, меньше всех радиус имеет та, радиус которой равен радиусу ABC, так как

Значит искомая сфера ABCD имеет R = 5.

По условию , значит , т.е. D (xD, yD, 0)

Заметим, что MD , так как MD =

Значит R = 5 не может быть ответом, т.к. MD

1. Перпендикуляр к плоскости ABC, проходящий через M - это множество равноудаленных от ABC точек в пространстве. А значит искомое O (центр сферы с наименьшим радиусом) принадлежит этой прямой.

Так как A, B, C имеют координату y = 0, ABC - плоскость Oxz. Соответственно , т.е. .

Так как M (3, 0, 8) принадлежит ей, задает множество точек с координатами (3, y, 8). Значит и центр искомой сферы - O (3, yO, 8)

1. OD =

Проверим случай, когда OD = 8:

OA = OB = OC = 8 (если O - центр искомой сферы)

OA =

Проверим:

OA =

ОС =

1. Значит O (3, , 8) - центр искомой сферы.

R = 8

D ()

# 

# График 1

[Ссылка на график в Desmos](https://www.desmos.com/3d/ddebfdd462?lang=ru)

# 

# 

# Задание 2

Изображение выглядит как текст, Шрифт, снимок экрана, число

Автоматически созданное описание

# Решение

1) Вычислите :

Заметим, что . Тогда – двукратный интеграл.

* Сначала вычисляем внутренний неопределённый интеграл: = , где erf(y) – функция ошибок.

Подставим переделы интегрирования y от 0 до и получим:

* Потом вычислим внешний интеграл:

= , где erf(x) – функция ошибок

Подставим пределы интегрирования x от 0 до и получим :

2)Вычислите

* Подставим в наш исходный интеграл K и получим двойной (несобственный) интеграл и выберем порядок интегрирования:

* Вычислим интеграл J:

1. Пусть u =

Тогда пусть du = и udu:

1. Вычислим интеграл и получим интеграл Френеля:

1. Подставим u:

* Вычислим интеграл K:

1. Пусть u =   
   Тогда пусть du = и udu:
2. Вычислим интеграл и получим интеграл Френеля:

1. Подставим u:

* Вычислите интегралы:



Пусть

Следовательно*,du =*

Сделаем обратную замену и получим:

1. = S(x)

3) Графики

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, число

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как линия, текст, График, диаграмма

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как линия, График, диаграмма, Шрифт

Автоматически созданное описание

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, Параллельный

Автоматически созданное описание

# Задание 3

Векторное поле H .

A screenshot of a computer

Description automatically generated

# Решение

1. Если ротор векторного поля равен 0, то поле потенциально.
2. Уравнения векторных линий:

*Изображение выглядит как линия, Параллельный, диаграмма

Автоматически созданное описание*

Рис 2.1 Векторные линии

1. Потенциал поля при помощи криволинейного интеграла

Потенциал можно вычислить по след. формуле:

где:

 – точка с *переменными координатами*, а   – некоторая фиксированная точка скалярного поля  .

Пусть   =

1. Уравнения линий уровня потенциала

Изображение выглядит как текст, линия, Параллельный, шаблон

Автоматически созданное описание

Рис 4.1 Линии уровня потенциала

1. Доказательство ортогональности векторных линий и линий уровня потенциала.

Доказательство:

1. – Векторное поле потенциально
2. – линии уровня потенциала
3. Направляющий вектор нормали для линий уровня потенциала
4. , следовательно градиент функции направлен по нормали к линии уровня этой функции, т. е. перпендикулярен линиям уровня потенциала.

Изображение выглядит как линия, Параллельный, диаграмма, текст

Автоматически созданное описание

Рис. 5.1 Векторные линии(зеленые) и линии уровня потенциала(синие)

1. Выберите какую-либо векторную линию поля и зафиксируйте на ней точки A и B, выбрав для них числовые координаты. Вычислите работу поля вдоль этой линии, используя найденный в п. 3) потенциал.

A graph of a line

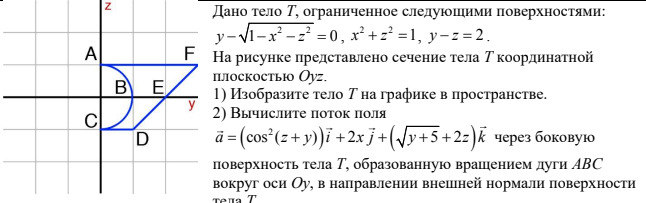
Description automatically generated

Векторная линия при C = 2, точки A(2; 1.3) B(1.5; 6.05)

Работа поля при помощи потенциала вычисляется по формуле:

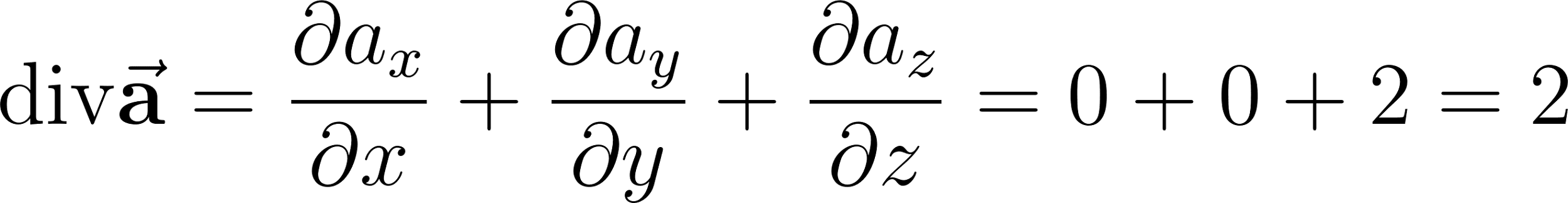
Работа потенциального поля от А до В равна 32.25

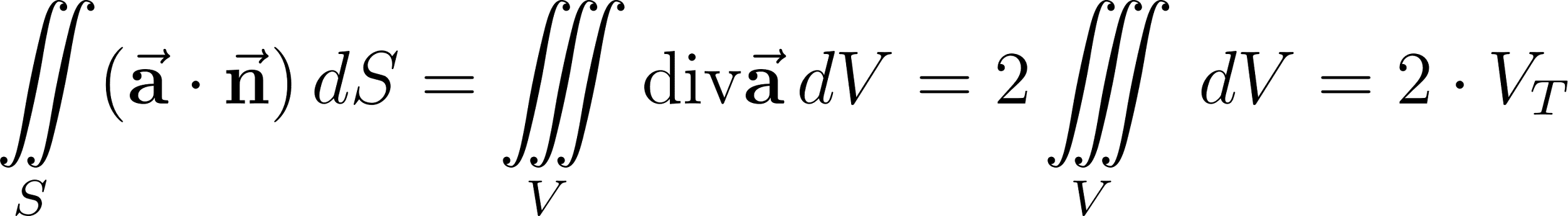
# Задание 4

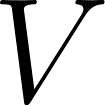
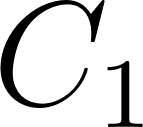
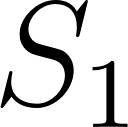
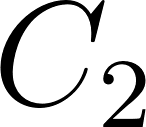
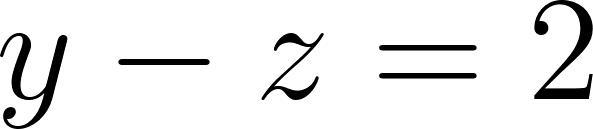
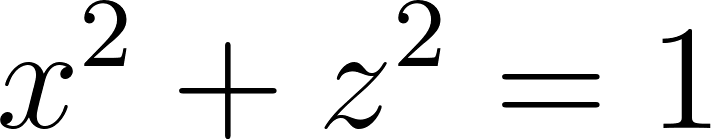
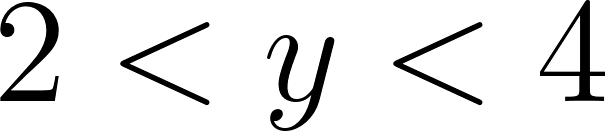


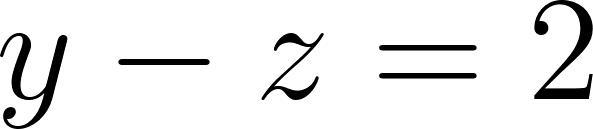
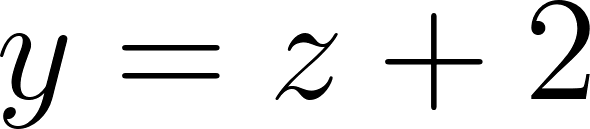
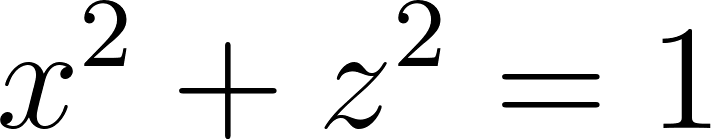
# Решение

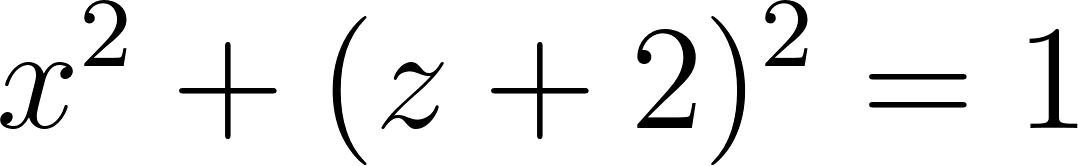
2) Вычислю поток по формуле Гаусса-Остроградского

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=%5Cmathrm%7Bdiv%7D%20%5Cvec%7B%5Cmathbf%7Ba%7D%7D%20%3D%20%5Cfrac%7B%5Cpartial%20a_x%7D%7B%5Cpartial%20x%7D%20%2B%20%5Cfrac%7B%5Cpartial%20a_y%7D%7B%5Cpartial%20y%7D%20%2B%20%5Cfrac%7B%5Cpartial%20a_z%7D%7B%5Cpartial%20z%7D%20%3D%200%20%2B%200%20%2B%202%20%3D%202#0)

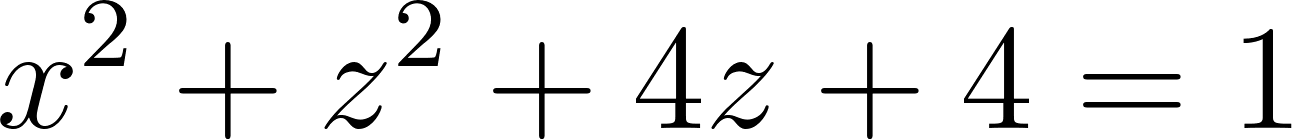
[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=%5Ciint%5Climits_%7BS%7D%20(%5Cvec%7B%5Cmathbf%7Ba%7D%7D%20%5Ccdot%20%5Cvec%7B%5Cmathbf%7Bn%7D%7D)%20%5C%2C%20dS%20%3D%20%5Ciiint%5Climits_%7BV%7D%20%5Cmathrm%7Bdiv%7D%20%5Cvec%7B%5Cmathbf%7Ba%7D%7D%20%5C%2C%20dV%20%3D%202%20%5Ciiint%5Climits_%7BV%7D%20%5C%2C%20dV%20%3D%202%20%5Ccdot%20V_T#0)

Объем тела [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V#0) можно вычислить как разность объема цилиндра [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=C_1#0) высотой 2 и радиусом 1 и объема полусферы [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=S_1#0) радиусом 1, плюс объем цилиндра [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=C_2#0) высотой 2 и радиусом 1, деленный на два. Это объясняется тем, что плоскость [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) делит цилиндр [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0) пополам по диагонали в интервале [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=2%20%3C%20y%20%3C%204#0), доказать это можно так:

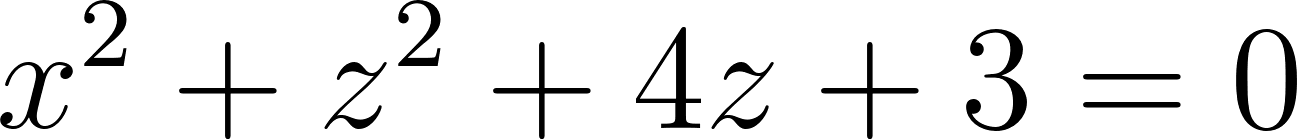
Уравнение плоскости [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) можно переписать в виде [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20%3D%20z%20%2B%202#0). Теперь подставим это выражение в уравнение цилиндра [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0):

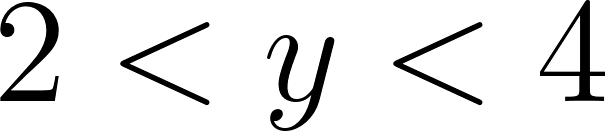
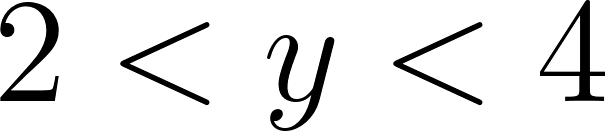
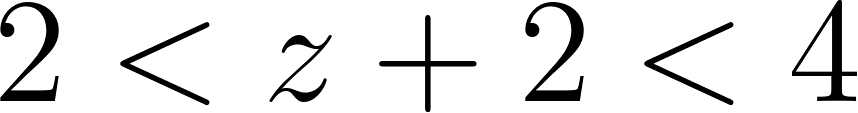
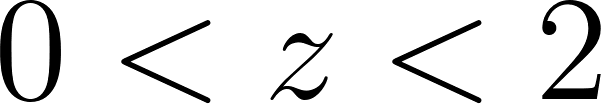
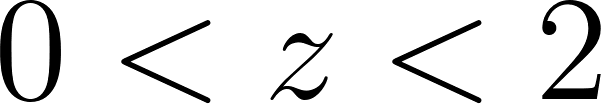
[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20(z%20%2B%202)%5E2%20%3D%201#0)

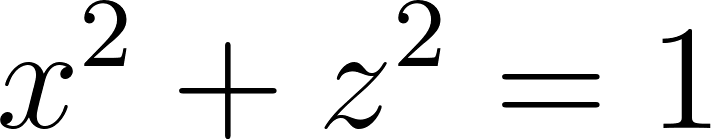
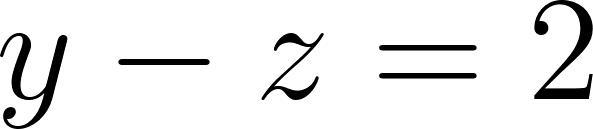
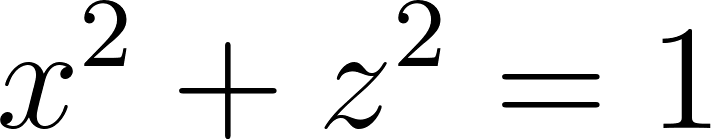
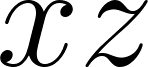
Раскроем скобки:

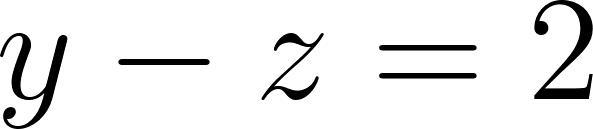
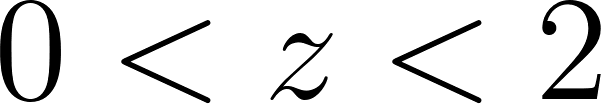
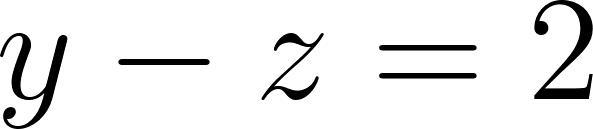
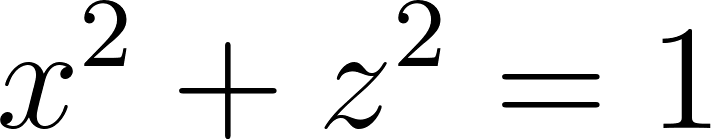
[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%2B%204z%20%2B%204%20%3D%201#0)

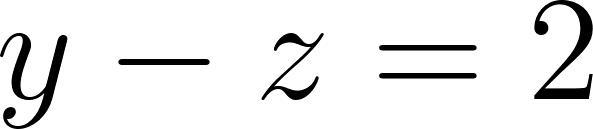
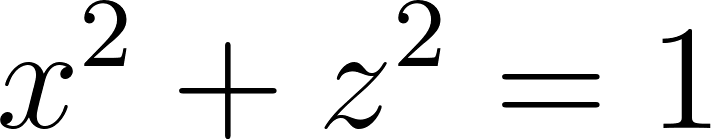
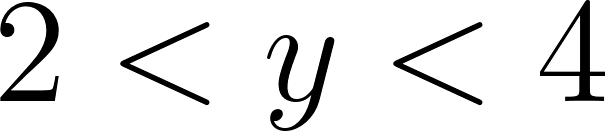
Получим:

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%2B%204z%20%2B%203%20%3D%200#0)

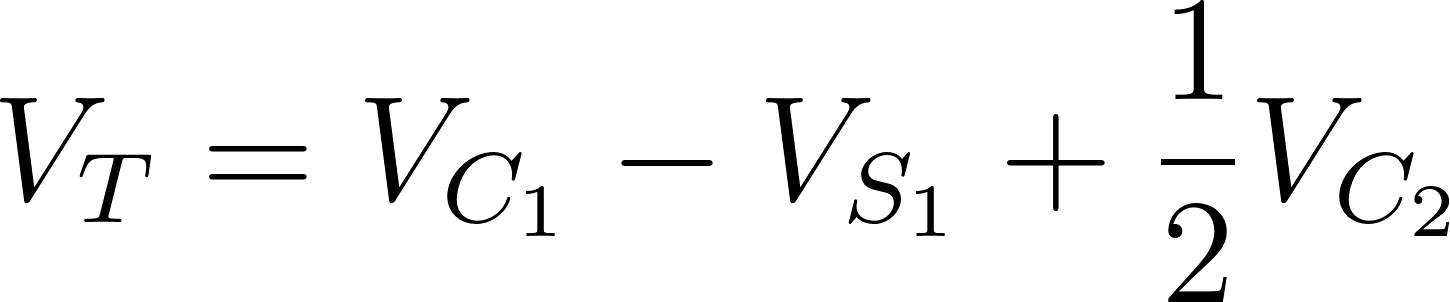
Теперь рассмотрим это уравнение в контексте диапазона [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=2%20%3C%20y%20%3C%204#0). Условие [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=2%20%3C%20y%20%3C%204#0) означает, что [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=2%20%3C%20z%20%2B%202%20%3C%204#0), что приводит к [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=0%20%3C%20z%20%3C%202#0). Таким образом, мы фокусируемся на интервале [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=0%20%3C%20z%20%3C%202#0).

Рассмотрим уравнение поверхности цилиндра [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0) и уравнение плоскости [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) в этом интервале. В этом случае уравнение цилиндра имеет вид [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0), что представляет собой круг с радиусом 1 в плоскости [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=xz#0).

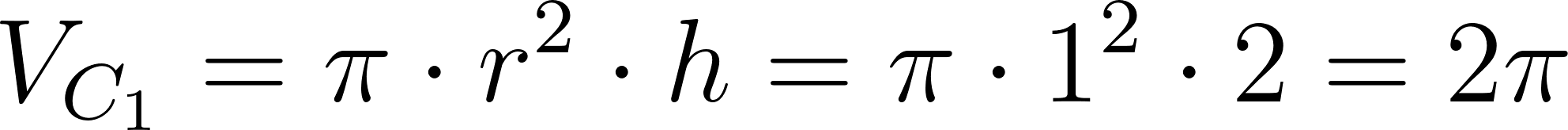
Уравнение плоскости [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) сдвигает круг вдоль оси [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y#0) на 2 единицы в положительном направлении оси [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=z#0). Таким образом, когда [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=0%20%3C%20z%20%3C%202#0), плоскость [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) пересекает цилиндр [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0) и делит его на две равные части.

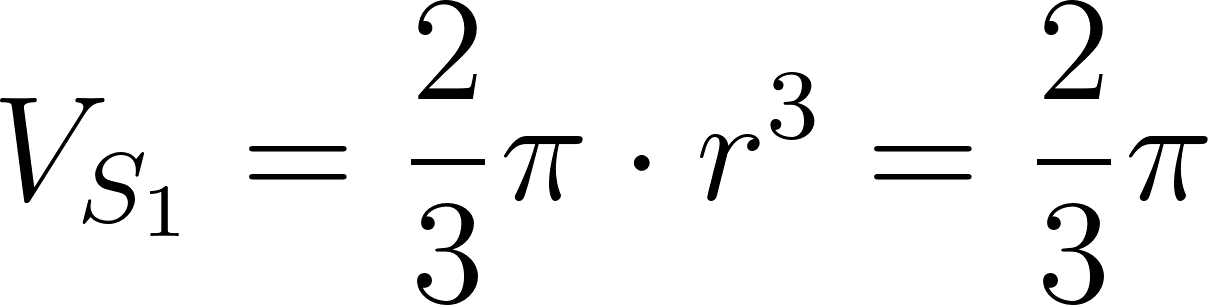
Таким образом, можно подтвердить, что плоскость [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=y%20-%20z%20%3D%202#0) действительно делит цилиндр [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=x%5E2%20%2B%20z%5E2%20%3D%201#0) на отрезке [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=2%20%3C%20y%20%3C%204#0) пополам в указанном интервале.

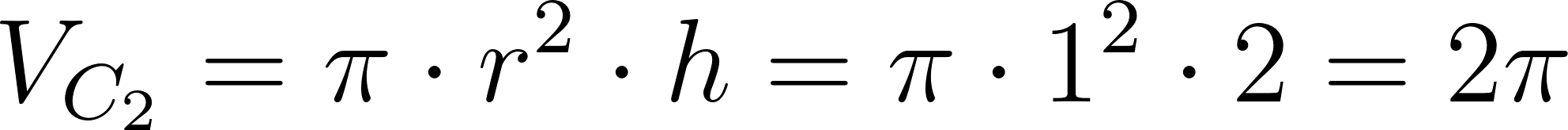
Получается, что объем можно записать следующим образом:

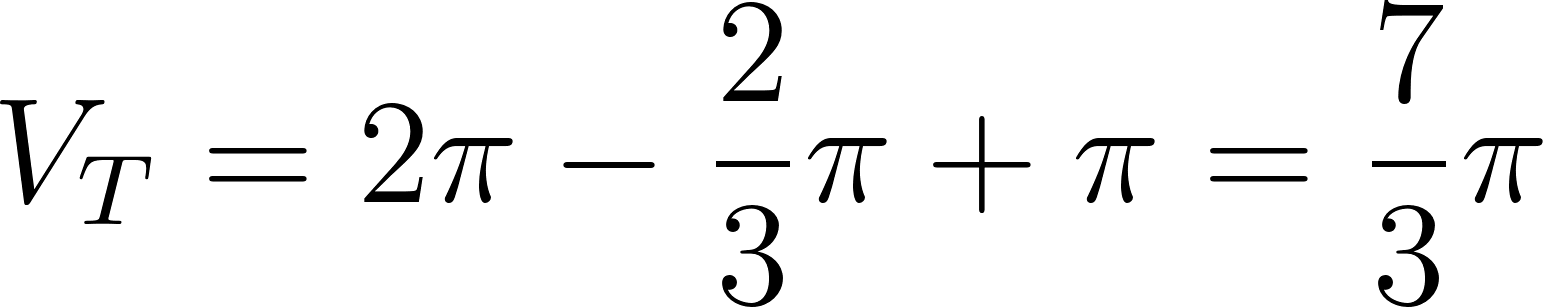
[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V_T%20%3D%20V_%7BC_1%7D%20-%20V_%7BS_1%7D%20%2B%20%5Cfrac%7B1%7D%7B2%7D%20V_%7BC_2%7D#0)

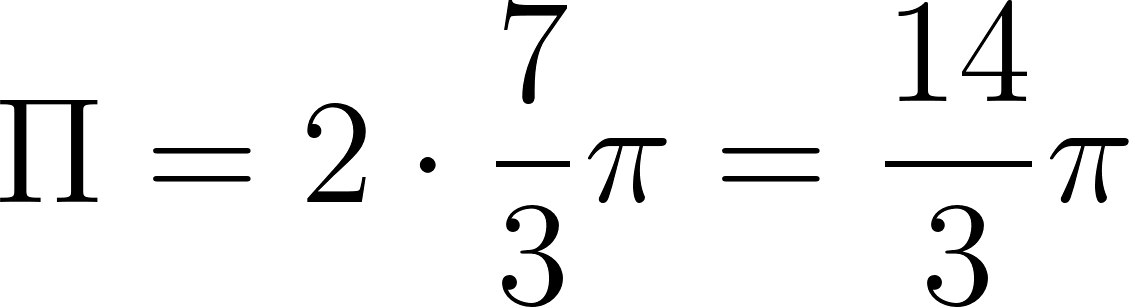
где

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V_%7BC_1%7D%20%3D%20%5Cpi%20%5Ccdot%20r%5E2%20%5Ccdot%20h%20%3D%20%5Cpi%20%5Ccdot%201%5E2%20%5Ccdot%202%20%3D%202%5Cpi#0)

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V_%7BS_1%7D%20%3D%20%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20%5Cpi%20%5Ccdot%20r%5E3%20%3D%20%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%20%5Cpi#0)

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V_%7BC_2%7D%20%3D%20%5Cpi%20%5Ccdot%20r%5E2%20%5Ccdot%20h%20%3D%20%5Cpi%20%5Ccdot%201%5E2%20%5Ccdot%202%20%3D%202%5Cpi#0)

[](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=V_T%20%3D%202%5Cpi%20-%20%5Cfrac%7B2%7D%7B3%7D%5Cpi%20%2B%20%5Cpi%20%3D%20%5Cfrac%7B7%7D%7B3%7D%5Cpi#0)

Таким образом, [](https://www.codecogs.com/eqnedit.php?latex=%5CPi%20%3D%202%20%5Ccdot%20%5Cfrac%7B7%7D%7B3%7D%5Cpi%20%3D%20%5Cfrac%7B14%7D%7B3%7D%5Cpi#0)

# Задание 5

Изображение выглядит как текст, снимок экрана, Шрифт, белый

Автоматически созданное описание

# Решение

Из теоремы Стокса:

Откуда суммируя получаем:

Применим теорему Остраградского – Гаусса и проинтегрируем обе части тождества:

Из правой части тождества:

Из левой части тождества:

По определению ротера:

То есть получаем:

# 

# 

# Оценочный лист

# 

| **Участник** | **Его вклад** |
| --- | --- |
| Агей Михаил | 100% |
| Васильев Илья | 100% |
| Гуменник Петр | 100% |
| Дубук Даниил | 100% |
| Игнатьева Ксения | 100% |

# 

# Вывод

Выполнив РГР №1, мы вспомнили материал программы математического анализа 1 курса, научились решать задачи по теме “Функция нескольких переменных и ее интеграл”. Привели подробное решение задач и графики, являющиеся наглядным отображением математических моделей и построенные в специальных программах